

MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Trinh Dang Khoi
Ta Oanh
Maria Conceição Domingos



Recomendado para alunos do 2.º Ciclo
do Ensino Secundário e aos estudantes
universitários de Matemática.

Copyright: © Trinh Dang Khoi, Ta Oanh e Maria Conceição Domingos/Mayamba Editora, 2015

Colecção: Educação

Título: Métodos de Demonstração Matemática

Autores: Trinh Dang Khoi, Ta Oanh e Maria Conceição Domingos

Editor: Arlindo Isabel

Revisora: Gabriela Varino

Capa e paginação: Fernando Cerqueira

Impressão e acabamento: Damer Gráficas, SA.

1.^a edição: Luanda, Dezembro de 2015

Tiragem: 2000 exemplares

Depósito legal n.º 7059/15

ISBN: 978-989-761-046-2



Condomínio Vila Rios, Rua Rio Cuango, n.º 16, Camana

Estrada Direita do Calemba 2

Município de Belas — Luanda-Sul/Angola

Cx. Postal 3462

E-mail: mayambaeditora@yahoo.com

Site: www.mayamba-editora.com/www.mayambaeditora.co.ao

Visite a nossa página no Facebook: **Mayamba Editora**

Toda a reprodução desta obra, por fotocópia ou por outro qualquer processo, sem prévia autorização escrita do editor, torna-se ilícita e passível de procedimento judicial.

Índice

Agradecimentos	9
Símbolos	11
Introdução	13

CAPÍTULO I

Indução Matemática

1.1 Introdução	15
1.2 Princípio da indução matemática	16
1.3 Aplicação de demonstração por indução matemática	18
1.3.1 Resumo do método e exemplos	18
1.3.2 Demonstração de identidade	18
1.3.3 Problemas trigonométricos	25
1.3.4 Demonstração de desigualdades	29
1.3.5 Problemas de divisibilidade	32
1.4 Outras formas de indução matemática	34
1.4.1 Resumo do método e exemplos	35
1.5 Exercícios	40

CAPÍTULO II

Demonstração da Proposição Condicional $A \Rightarrow B$ Substituindo-a
pela Demonstração da Sua Proposição Contrapositiva $\neg B \Rightarrow \neg A$

2.1 Resumo do método e exemplos	41
2.2 Exercícios	44

CAPÍTULO III

Métodos de Demonstração por Absurdo

3.1 Resumo do método e exemplos	45
3.2 Exercícios	48

CAPÍTULO IV

Demonstração por Contra-exemplo

4.1 Resumo do método e exemplos	49
4.2 Exercícios	53

CAPÍTULO V

Demonstração pela Consideração de Todos os Casos Particulares Possíveis

5.1 Resumo do método e exemplos	55
5.2 Exercícios	59

CAPÍTULO VI

Demonstração pela Eliminação dos Casos Impossíveis

6.1 Resumo do método e exemplos	61
6.2 Exercícios	64

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Professor Nguyen Trong Huy e ao Professor Doutor Thai Manh Cau (Professor de Faculdade de Ciências de Universidade Agostinho Neto) pela revisão deste trabalho e pelos valiosos conselhos para o melhoramento desta obra.

Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais diferentes de zero
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de todos os números inteiros positivos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\emptyset$	Conjunto vazio
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$+$	Mais
$-$	Menos
$\Rightarrow$	Implica
$\nRightarrow$	Não implica
$\exists$	Existe
$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$/$	Barra de divisão
$\setminus$	Diferença de conjuntos
$ $	Módulo ou valor absoluto
$\geq$	Maior ou igual a
$\leq$	Menor ou igual a
$\vee$	Ou ($x \vee y$: lê-se x ou y)
$\wedge$	E ($x \wedge y$: lê-se x e y)

$n|m$ n divide m (n é divisor de m)

$a \equiv b \pmod{m}$: a é congruente a b módulo m ($a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b$
é divisível por m)

$\neg A$ A negação da proposição A

$\sqrt{\quad}$ Raiz quadrada

$\{$ Chaveta

$($ Parêntese curvo

$[$ Parêntese recto

Introdução

A Matemática é uma ciência exacta: cada proposição matemática deve ser demonstrada. O que é uma demonstração? A demonstração é um argumento lógico em que se estabelece a veracidade de uma proposição, baseada em definições, em axiomas, em algumas proposições verdadeiras e em regras lógicas.

A demonstração matemática faz parte do programa escolar do ensino geral. Mas até agora, em Angola, não existe um manual que apresente os métodos de demonstração matemática. Por isso, alguns alunos do ensino médio, e até estudantes na universidade, encontram dificuldades na apresentação de uma demonstração matemática, pois não sabem analisar a hipótese e a conclusão para, então, escolher um método de demonstração.

É com este fim que apresentamos alguns métodos de demonstração matemática usados no ensino e no estudo da Matemática. A teoria foi simplificada o máximo possível, de modo a dar aos alunos os conhecimentos necessários e úteis. Em cada capítulo são apresentados o resumo do método, os exemplos ilustrativos e os exercícios para praticar.

Neste trabalho são expostos os exemplos elementares. Numa primeira leitura, os alunos do ensino médio precisam apenas de dominar bem o resumo do método e os exemplos simples ilustrados.

Esta obra destina-se, principalmente, aos alunos e professores do 2.º Ciclo do Ensino Secundário e aos estudantes universitários de Matemática.

CAPÍTULO I

Indução Matemática

1.1 Introdução

As ciências naturais utilizam o método da indução empírica para formular leis, que devem reger determinados fenómenos, a partir de um grande número de observações particulares seleccionadas adequadamente.

A validade de um teorema matemático estabelece-se de forma totalmente diferente. Verificar que uma certa afirmação é verdadeira num grande número dos casos particulares não nos permitirá concluir que ela seja válida em geral.

Com efeito, dada a expressão $f(n) = n^2 - n + 41$, consideremos a afirmação: «Para cada inteiro positivo n , o valor $f(n)$ é um número primo.»

1. Para $n = 1$, $f(1) = 41$;
2. Para $n = 2$, $f(2) = 43$;
3. Para $n = 3$, $f(3) = 47$;
4. Para $n = 40$, $f(40) = 1601$.

Então, $f(1), f(2), \dots, f(40)$ são números primos. A afirmação está certa quando n é bastante elevado, mas acontece que $f(41) = 41^2$ não é um número primo.

Consideremos a seguinte afirmação:

« $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.» Como verificar a sua validade? Evidentemente que é impossível verificá-la em todos os

casos particulares. Para demonstrar a verdade deste tipo de proposição, que na realidade é uma sequência infinita de proposições, introduziremos o chamado método de indução matemática.

O uso do princípio da indução completa como método de demonstração parece ser muito antigo e encontra-se implícito na obra de Euclides.

O termo «indução matemática» surgiu muito mais tarde. Apareceu pela primeira vez, em 1858, num artigo de Augustus de Morgan. Este princípio desempenha um papel essencial na fundamentação do número natural.

1.2 Princípio da indução matemática

Nesta parte, serão apresentados os princípios da indução matemática, alguns exemplos e exercícios.

TEOREMA 2.1: Seja S um subconjunto do conjunto $\mathbb{N}^*$ dos números naturais não nulos que satisfaz as duas seguintes condições:

1. $1 \in S$;
2. Para todo o inteiro positivo k , se $k \in S$, então, $k + 1 \in S$.

Nestas condições, S é o conjunto $\mathbb{N}^*$ dos naturais diferentes de zero. Quer dizer, $S = \mathbb{N}^*$.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos, contrariamente, que S não é o conjunto dos números naturais não nulos e que X seja o conjunto de todos os números naturais não nulos que não pertencem a S . Isto é: $X = \{x \in \mathbb{N}^* \wedge x \notin S\} = \mathbb{N}^* \setminus S \neq \emptyset$.