

EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Trinh Dang Khoi
Ta Oanh



MAYAMBA
EDUCAÇÃO

Recomendado para alunos do 2.º Ciclo
do Ensino Secundário e aos estudantes
universitários de Matemática.

Copyright: © Trinh Dang Khoi e Ta Oanh/Mayamba Editora, 2015

Colecção: Educação

Título: Equações, Inequações e Funções Quadráticas

Autores: Trinh Dang Khoi e Ta Oanh

Editor: Arlindo Isabel

Revisão: Gabriela Varino

Capa e paginação: Fernando Cerqueira

Impressão e acabamento: Damer Gráficas, SA.

1.ª edição: Luanda, Dezembro de 2015

Tiragem: 2000 exemplares

Depósito legal: 6362/14

ISBN: 978-989-761-023-3



Condomínio Vila Rios, Rua Rio Cuango, n.º 16, Camana

Estrada Direita do Calemba 2

Município de Belas — Luanda-Sul/Angola

Cx. Postal 3462

E-mail: mayambaeditora@yahoo.com

Site: www.mayamba-editora.com/www.mayambaeditora.co.ao

Visite a nossa página no Facebook: **Mayamba Editora**

Toda a reprodução desta obra, por fotocópia ou por outro qualquer processo, sem prévia autorização escrita do editor, torna-se ilícita e passível de procedimento judicial.

Índice

Símbolos	11
Introdução	13

CAPÍTULO I

Equações Quadráticas

1.1 Tipos de equações quadráticas	15
1.1.1 Equação do tipo $ax^2 = 0$ com $a \neq 0$	16
1.1.2 Equação do tipo $ax^2 + c = 0$ com $a \neq 0$	16
1.1.3 Equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$	16
1.1.4 Resolução da equação quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$	17
1.2 Fórmula simplificada das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$	19
1.3 Fórmula de Viète	20
1.4 Aplicação da fórmula de Viète	21
1.4.1 Aplicação da fórmula de Viète para calcular as raízes de algu- mas equações quadráticas particulares	21
1.4.2 Aplicação da fórmula de Viète para determinar os sinais das raízes das equações quadráticas	23

CAPÍTULO II

Resolução de Equações Quadráticas

2.1 Alguns problemas da teoria de resolução de equações	27
2.1.1 Equação implicada	27

2.1.2 Equações equivalentes	28
2.2 Resolução de equações quadráticas simples	28
2.2.1 Método de resolução de equações simples.....	29
2.2.2 Resumo do método.....	29
2.3 Resolução de equações quadráticas fraccionárias	30
2.3.1 Método 1.....	30
2.3.2 Método 2.....	32
2.4 Resolução de equações irracionais	33
2.4.1 Método 1.....	33
2.4.2 Método 2.....	35
2.4.3 Método 3.....	37

CAPÍTULO III

Funções Quadráticas e Estudo do Sinal das Funções Quadráticas

3.1 Funções quadráticas incompletas.....	39
3.1.1 Função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$	39
3.1.2 Função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $b = 0$	40
3.1.3 Função quadrática do tipo $f(x) = a(x + b)^2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$	41
3.1.4 Função quadrática do tipo $f(x) = a(x + b)^2 + k$, $a, b, k \neq 0$	41
3.1.5 Função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	41
3.1.6 Zeros da função quadrática	42
3.1.7 Gráfico da função quadrática	42
3.1.8 Estudo dos sinais da função quadrática.....	43

CAPÍTULO IV

Inequações Quadráticas

4.1 Inequações equivalentes	51
4.2 Formas fundamentais das inequações quadráticas	53
4.3 Como resolver inequações quadráticas.....	54
4.4 Algoritmos a aplicar na resolução de inequações quadráticas fundamentais.....	54
4.4.1 Algoritmo para resolver inequações quadráticas fundamentais dos tipos $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	54

4.4.2 Algoritmo para resolver inequações quadráticas fundamentais dos tipos $ax^2 + c > 0$, $ax^2 + c < 0$, $ax^2 + c \geq 0$, $ax^2 + c \leq 0$. Isto é, $a, c \neq 0$, $b = 0$	56
4.4.3 Algoritmo para resolver inequações quadráticas fundamentais dos tipos $ax^2 + bx > 0$, $ax^2 + bx < 0$, $ax^2 + bx \geq 0$, $ax^2 + bx \leq 0$ em que, $a, b \neq 0$, $c = 0$	58
4.4.4 Algoritmo para resolver inequações quadráticas fundamentais dos tipos $ax^2 > 0$, $ax^2 < 0$, $ax^2 \geq 0$, $ax^2 \leq 0$ em que, $a \neq 0$, b e $c = 0$	59
4.5 Como resolver inequações quadráticas simples	60
4.6 Inequações fraccionárias dos tipos	60
4.7 Inequações fraccionárias	61

CAPÍTULO V

Dificuldades e Erros Encontrados na Resolução de Equações Quadráticas

5.1 Erros na aplicação das transformações algébricas	65
5.2 Erros de raciocínio lógico e erros na aplicação de regras lógicas	70
5.3 Erros de conhecimento de base	71

CAPÍTULO VI

Dificuldades e Erros Encontrados na Resolução de Inequações Quadráticas

6.1 Erros na aplicação das transformações algébricas	75
6.2 Erros de raciocínio lógico e erros na aplicação de regras lógicas	78
Bibliografia	85

Símbolos

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\Leftrightarrow$	Equivalente
$\nLeftrightarrow$	Não equivalente
$\Rightarrow$	Implica
$\nRightarrow$	Não implica
$\forall$	Para todos
Δ	Delta
$\vee$	Ou ($x \vee y$: lê-se x ou y)
$\wedge$	E ($x \wedge y$: lê-se x e y)
$\in$	Pertence
$\exists$	Existe
$\therefore$	Portanto
$\subseteq$	Está contido
$\{$	Chaveta
$($	Parêntese curvo
$[$	Parêntese recto

Introdução

No programa de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Secundário (Reforma Educativa), a equação quadrática é apresentada nas 8.ª e 9.ª classes; a função quadrática é apresentada na 10.ª classe; e a inequação quadrática é apresentada nas 9.ª e 10.ª classes. As equações e inequações fraccionárias, bem como as equações e inequações irracionais, são apresentadas na 12.ª classe.

A equação, a função e a inequação quadráticas são três problemas centrais e importantes do curso de Matemática do ensino médio. Existe uma estreita relação entre si.

Este livro pretende oferecer uma visão global destes problemas e permitir aos alunos assimilar bem as matérias e as ligações entre elas. Aqui são apresentados os problemas fundamentais das equações, funções e inequações quadráticas, além de serem analisados os erros e as dificuldades no ensino e na aprendizagem das mesmas. Em cada exemplo, apresentam-se a análise de erros dos alunos e o método para eliminar as dificuldades no estudo destas matérias.

Ao publicarem esta obra, os autores têm como objectivo proporcionar aos alunos um manual que contribua para elevar a qualidade da aprendizagem.

A teoria foi simplificada ao máximo, de modo a transmitir aos alunos apenas os conhecimentos necessários e úteis. Em cada problema, são apresentados o resumo de método e exemplos ilustrativos, e cada tema apresenta os erros e as dificuldades no ensino e na aprendizagem destas matérias, com vista a apoiar os alunos.

CAPÍTULO I

Equações Quadráticas

Definição: Chama-se equação quadrática com uma incógnita uma equação de forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; x é a incógnita.

EXEMPLO 1: $x^2 - 5x + 6 = 0$, em que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$

EXEMPLO 2: $7x^2 - x = 0$, em que $a = 7$, $b = -1$ e $c = 0$

EXEMPLO 3: $x^2 - 36 = 0$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -36$

EXEMPLO 4: $x^2 = 0$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$

1.1 Tipos de equações quadráticas

Definição 1: A equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, chama-se equação quadrática completa.

Definição 2: A equação quadrática $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ chama-se equação quadrática incompleta se $b = 0$ ou $c = 0$.

EXEMPLO 1: $2x^2 + 5x = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$)

EXEMPLO 2: $5x^2 + 4 = 0$ ($a \neq 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$)

EXEMPLO 3: $4x^2 = 0$ ($a \neq 0$, $b = 0$ e $c = 0$)

1.1.1 Equação do tipo $ax^2 = 0$ com $a \neq 0$

$$ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 0$$

A equação $ax^2 = 0$ com $a \neq 0$ tem raízes duplas iguais: $x_{1,2} = 0$

1.1.2 Equação do tipo $ax^2 + c = 0$ com $a \neq 0$

$$ax^2 + c = 0, \quad a \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$ax^2 = -c \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow$$

Se $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow$ a equação tem duas raízes: $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

Se $\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow$ a equação não tem soluções

Se $\frac{c}{a} = 0 \Rightarrow c = 0$, a equação tem raízes duplas: $x_{1,2} = 0$

EXEMPLO 1: Resolva a equação $2x^2 - 5 = 0$

Resolução:

$$2x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Logo } S = \left\{ -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}} \right\}$$

1.1.3 Equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Logo, } S = \left\{ 0; -\frac{b}{a} \right\}$$

EXEMPLO 1: Resolva a equação $2x^2 + 5x = 0$

Resolução:

$$2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Logo, } S = \left\{ -\frac{5}{2}, 0 \right\}$$

1.1.4 Resolução da equação quadrática do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \tag{2}$$

$$\text{Fazendo } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \tag{3}$$

Considerar-se as condições seguintes:

1. $\Delta < 0$: a equação (3) não tem solução, desta forma a equação (1) também não tem solução.